

SAT ソルバーを用いた 正多面体に対する Magic Graph の構成

杉 山 雅 英^{†1}

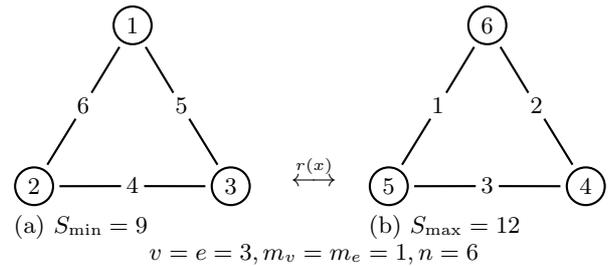


図 2 三角形 C_3 への $[1, 1]$ EMTL の例

Magic Graph Generation on Polyhedrons using SAT Solver

MASAHIDE SUGIYAMA^{†1}

和文概要: SAT ソルバーの一つである minisat および順序符号化手法 sugar を用いて正多面体に対して Magic Graph を構成する方法を述べ、その高速化手法を提案する。さらに正多面体での Magic Graph の定和の分布に関する性質を述べる。与えられたグラフに対して頂点・辺に配置する数字の個数 m_v, m_e に対して 1 から小さな数を頂点に配置して Magic Graph が構成できる場合を Super と定義する。実現可能な候補となる定和の全てを構成できるとき、Perfect, Super でないとき SemiPerfect, それ以外の定和が不規則に出現する場合を Singular と定義する。本論文では Perfect, SemiPerfect 伝搬定理を証明する。その性質を用いて正多面体の Magic Graph の定和の構成可能性について述べる。

1. まえがき

魔方陣 (magic square) は 1 から連続した全ての数字をただ一度だけ用いて方形に数字を配置し縦横斜めの数字の和を一定にする数学問題である。方形の大きさ k を次数と呼ぶ。方形の面積が k^2 であるので使用する数字は $n = k^2$ であり、1 から n の総和は $\frac{n(n+1)}{2}$ であって、行 (および列) の個数が k であるので一定値 S は式 (1) を満たすことになる。

$$k \cdot S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{k^2}{2} \cdot (k^2 + 1) \quad (1)$$

この S を定和 (magic sum) ^{*1}と呼ぶ。図 1 に 3 次の魔方陣を示す。定和は式 (1) で与えた通り、 $S = 15$ である。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$k = 3, n = 9, S = 15$

図 1 3 次の魔方陣

図 2 に示すようにグラフ $G = (V, E)$ の頂点・辺の集合 V, E ($v = |V|, e = |E|$) に連続した整数を全てただ一度だけ配置して辺または頂点での和が一定となるグラフを magic graph, 配置を与える写像を magic label と呼ぶ。本論文ではグラフとは平面グラフに限らない一般の無向グラフであり、多重辺やループを含んでも良いし、連結グラフでなくても良い。ただし、孤立した頂点を持たないものとする。

Sedláček (1963)¹⁾ が magic graph 問題を提起して以来、MacDougall 等 (2002)²⁾ の $V \cup E$ から $\{1, 2, \dots, v+e\}$ への双射である Vertex-Magic Total Labeling (VMTL), Wallis 等 (2000)³⁾ の Edge-Magic Total Labeling (EMTL) や Sugiyama (2014)⁴⁾ の一般化 EMTL などが検討されてきた。基礎的概念, 性質, 研究の歴史を体系的に述べている Marr& Wallis (2013)⁵⁾ 及び研究の歴史, 得られている結果の一覧については Gallian (2016)⁶⁾ を参照すると良い。

正多面体のような大規模なグラフに対して Magic Graph の条件を満たす写像を手作業で構成するのは容易ではない⁷⁾。本論文では SAT ソルバーを用いた Magic Graph の解の探索の高速化について述べ、正多面体における EMTL の構成と性質について述べる。

2. Magic Graph と magic sum

Marr& Wallis (2013)⁵⁾ に従えば $V \cup E$ から n 個の整数の集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ への式 (2) のグラフラベリングの写像

$$\lambda : V \cup E \rightarrow C \quad (2)$$

が双射であり、 λ がグラフの着目する構成要素 (頂点, 辺, 面など) での数字の和が一定になる時, その和を定和, 写像 λ を magic labeling, グラフ G を magic graph と呼ぶ。グラフの辺に着目する場合を edge-magic (EM), 頂点に着目する場合を vertex-magic (VM), グラフの面に着目する場合を face-magic (FM) と呼ぶ。頂点に配置する場合 ($D = V$) を vertex label (VL), 辺に配置する場合 ($D = E$) を edge label (EL), 両方に配置する場合 ($D = V \cup E$) を total label (TL) と呼んで区別してきた。edge-magic かつ total label の場合を EMTL と略す。ただし従来の研究では頂点や辺に配置する数字の個数は 0 個または 1 個であった。本論文では edge-magic で定義域は常に $D = V \cup E$ であるので edge-magic total labeling (EMTL) の用語を用いる。

本論文では頂点・辺に複数個の数字をラベルとして配置する

^{†1} 会津大学

The University of Aizu

*1 magic constant と呼ぶこともある。

ためグラフ G の頂点 V と辺 E から連続する自然数の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割への写像 λ

$$\lambda: V \cup E \rightarrow 2^{\{1, 2, \dots, n\}}$$

$$\begin{cases} \lambda(z) \cap \lambda(z') = \emptyset & (z, z' \in V \cup E) \\ \bigcup_z \lambda(z) = \{1, 2, \dots, n\} \end{cases} \quad (3)$$

を graph labeling と呼ぶ。辺 $e_\ell = v_i v_j$ に対して λ を用いて重み $\lambda^*(e_\ell)$ を式 (4) で定義する。

$$\lambda^*(e_\ell) = \lambda(v_i) + \lambda(e_\ell) + \lambda(v_j) \quad (4)$$

全ての辺 $e_\ell \in E$ が式 (5) を満たす時, Edge Magic Total Label (EMTL) とよび, S を定和 (magic sum) と呼ぶ⁵⁾。

$$\lambda^*(e_\ell) = S \quad (\text{constant}) \quad (5)$$

ここで定和 S が満たす定和方程式 (6) が導かれる⁸⁾。ただし $\lambda(v_i)$ の和の計算は $\lambda(v_i)$ に属する数の和を求めることと定義する。

命題 1 定和方程式

$$e \cdot S = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)\lambda(v_i) + \frac{n(n+1)}{2} \quad (6)$$

証明は省略する。頂点・辺に置く数字の個数が各々一定値 m_v, m_e の時, 斉次 $[m_v, m_e]$ EMTL と呼ぶ。 λ を $[m_v, m_e]$ EMTL とすると使用する数字 n は頂点・辺の個数 $v = |V|, e = |E|$ を用いて式 (7) で与えられる。

$$n = m_v v + m_e e \quad (7)$$

定和方程式 (6) から定和 S は頂点に配置する数字集合 $\lambda(v_i)$ で決定されることが分かる。式 (6) を用いて⁵⁾ の定理 2.1⁹⁾ は n に関する定理 1 に一般化できる⁸⁾。定理は λ が斉次型であることを仮定しない。

定理 1 EMTL の非存在

グラフ G の辺の個数 e を偶数とし, 全ての頂点の次数を奇数とする。 $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ であれば G に対して EMTL は存在しない。

証明は省略する。非存在性に関する定理 1 とは異なり EMTL が存在する場合にその定和が受ける制約に関して以下が成り立つ。

定理 2 EMTL の定和の制約

- (1) 正則グラフ G の辺の個数 e と頂点の次数 d に対して最大公約数を $c = (e, d-1)$ とし, $e = ce', d-1 = cd'$ とする。 $d' > 1$ であれば EMTL の定和 S は $S \equiv S_0 \pmod{d'}$ を満たす。
- (2) グラフ G の辺の個数 e を奇数とし, 全ての頂点の次数を奇数とする。 G に対する EMTL の定和は $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$ であれば S は偶数, $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ であれば S は奇数である。

証明は省略する。以降では斉次 EMTL に限定する。式 (6) の

右辺の第 1 項を式 (8) で表す。

$$\tilde{S}_V = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)\lambda(v_i), \quad (S_V = \sum_{i=1}^v \lambda(v_i)) \quad (8)$$

定和 S と \tilde{S}_V との関係述べる。

命題 2 定和の性質

- (1) 定和 S は \tilde{S}_V の値で決定される。 \tilde{S}_V の最大・最小 $\tilde{S}_{V, \max}, \tilde{S}_{V, \min}$ に対応する S の最大・最小値を S_{\max}, S_{\min} と表す。
- (2) S_{\max}, S_{\min} および $\tilde{S}_{V, \max}, \tilde{S}_{V, \min}$ の間に以下の関係が成り立つ。

$$e(S_{\max} - S_{\min}) = \tilde{S}_{V, \max} - \tilde{S}_{V, \min} \quad (9)$$
- (3) 頂点 v_i に配置する数字 $\lambda(v_i)$ の総和 S_V の最大値・最小値 $S_{V, \max}, S_{V, \min}$ は式 (10) で, それらの和, 差は式 (11), (12) で与えられる。

$$\begin{cases} S_{V, \max} = nm_v v - \frac{m_v v(m_v v - 1)}{2} \\ S_{V, \min} = \frac{m_v v(m_v v + 1)}{2} \end{cases} \quad (10)$$

$$S_{V, \max} - S_{V, \min} = m_v v m_e e \quad (11)$$

$$S_{V, \min} + S_{V, \max} = m_v v(n + 1) \quad (12)$$

証明は省略する。一般にグラフにおいて頂点の次数 d_i と辺の個数 e について $\sum_{i=1}^v d_i = 2e$ が成り立つ¹⁰⁾。 G が正則グラフの場合には式 (13) が成り立ち, $\tilde{S}_V = (d-1)S_V$ で計算される。

$$d \cdot v = 2e \quad (13)$$

式 (6) から最大・最小定和に関する命題 3 が得られる。

命題 3 正則グラフにおける $[m_v, m_e]$ EMTL の最大・最小定和の差

正則グラフにおける $[m_v, m_e]$ EMTL の最大・最小定和 S_{\max}, S_{\min} の差は式 (14) で与えられる。

$$S_{\max} - S_{\min} = (d-1)m_v v m_e = m_v m_e (2e - v) \quad (14)$$

証明は省略する。 Enomoto 等¹¹⁾ は EMTL $\lambda_{[1,1]}$ において v 個の頂点に数字 $\{1, 2, \dots, v\}$ を配置する場合を super edge-magic と呼んだ。本論文ではその定義を $[m_v, m_e]$ EMTL に拡張する。

定義 1 Super EMTL 及び Upper EMTL

グラフ G の v 個の頂点に数字 $\{1, 2, \dots, m_v v\}$ を配置する EMTL $\lambda_{[m_v, m_e]}$ を $[m_v, m_e]$ Super EMTL (SEMTL) と呼ぶ。 v 個の頂点に数字 $\{n, n-1, \dots, n-m_v v+1\}$ を配置する EMTL $\lambda_{[m_v, +m_e]}$ を $[m_v, m_e]$ Upper EMTL (UEMTL) と呼ぶ。

Super EMTL の定和は命題 2 の最小定和 S_{\min} であり, Upper EMTL の定和は最大定和 S_{\max} である。 EMTL が存在する定和の最大値・最小値を定和最大値・定和最小値及び最大 EMTL・最小 EMTL と呼び, S_{\max}^*, S_{\min}^* 及び $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ と表す。定義

から $S_{\min} \leq S_{\min}^* \leq S_{\max}^* \leq S_{\max}$ である。

頂点に $1 \sim m_v v$ を配置する場合が最小となることと式 (10) を用いて式 (15) が得られる。

$$\begin{cases} S_{\min} = m_v(m_v v + 1) + m_v v m_e + \frac{1}{2} \cdot m_e(m_e e + 1) \\ S_{\max} = 2m_v m_e e + m_v(m_v v + 1) + \frac{1}{2} \cdot m_e(m_e e + 1) \end{cases} \quad (15)$$

[1, 1] Super EMTL に対して成り立つ Enomoto の不等式¹¹⁾ 「 $e < 2v - 3$ 」は以下のように拡張できる。

命題 4 EMTL $\lambda_{[m_v, m_e]}$ に対する Enomoto の不等式
頂点数 v , 辺の数 e の $[m_v, m_e]$ EMTL に対して以下の不等式が成り立つ。

$$m_e(2 - m_e)e < m_v(2m_v + m_e - 1)v + \beta \quad (16)$$

ここで $\beta = 1 - 2m_v(2m_v + m_e - 1) - (m_e - 1)^2$ 。

証明は省略する。

3. EMTL の変換と合成

与えられた EMTL から他の EMTL を作り出す方法を述べる。

3.1 アフィン変換と $[m_v, m_e]$ EMTL

式 (2) の集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ のグラフラベリング写像 $\lambda: V \cup E \rightarrow 2^{\{c_1, c_2, \dots, c_n\}}$ と整数係数のアフィン変換 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) との合成 $f \circ \lambda: V \cup E \rightarrow 2^{\{f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)\}}$ を以下で定義する。

$$f \circ \lambda(z) = \{f(x) \mid x \in \lambda(z)\} \quad (z \in V \cup E)$$

命題 5 EMTL のアフィン変換

(1) λ が定和 S の edge-magic であれば, $f \circ \lambda$ も edge-magic であり, その定和の値 \tilde{S} は式 (17) で与えられる。

$$\tilde{S} = aS + b(2m_v + m_e) \quad (17)$$

(2) $C = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $r(x) = -x + n + 1$ で λ が EMTL であれば $r \circ \lambda$ も EMTL となる。

証明は省略する。 G における二つの写像 λ, λ' が $r(x)$ を用いて $\lambda' = r \circ \lambda$ とできる時, それらの写像 λ, λ' を双対 (dual)²⁾ と定義し関係式 (18) で表す。

$$(\lambda, S) \iff (\lambda', S') \quad (18)$$

$r \circ r = \text{id}$ (恒等写像) であるので $\lambda' = r \circ \lambda$ と $\lambda = r \circ \lambda'$ とは等価である。ここで双対性に関する定理 3 と命題 6 が成り立つ⁸⁾。

定理 3 $[m_v, m_e]$ EMTL における双対定和の性質

双対 $(\lambda, S) \iff (\lambda', S')$ である時, 以下が成り立つ。

- (1) それぞれの定和: $S + S' = (2m_v + m_e)(n + 1)$
- (2) 対応する頂点: $\lambda(v_i) + \lambda'(v_i) = m_v(n + 1)$
- (3) 頂点での総和: $S_V + S'_V = m_v v(n + 1)$

証明は省略する。

命題 6 Super/Upper $[m_v, m_e]$ EMTL の双対性

(1) 最小 (最大) EMTL の双対は最大 (最小) EMTL である。

$$S_{\max}^* + S_{\min}^* = (2m_v + m_e)(n + 1) \quad (19)$$

(2) Super (Upper) EMTL の双対は Upper (Super) EMTL である。

$$S_{\max} + S_{\min} = (2m_v + m_e)(n + 1) \quad (20)$$

証明は省略する。命題 6 から Super/Upper (最大/最小) EMTL の一方が構成できれば他方も構成可能である。図 2-(a) の Super EMTL (λ_{\min}, S_{\min}) から図 2-(b) の Upper EMTL (λ_{\max}, S_{\max}) を変換 $r(x) = 7 - x$ ($n = 6$) で生成できる。定和 $S(S_{\min} \leq S \leq S_{\max})$ を持つ EMTL の存在は定和 S' を持つ EMTL の存在と同値であり, 一方を構成すれば良いことになる。 C_3 ($m_v = 1, m_e = 1$) の定和候補 9, 10, 11, 12 の 9, 12 および 10, 11 は双対な配置から生成できることになる。定和 $S = 11$ を持つ配置も構成できるので C_3 に対し定和は $S = 9, 10, 11, 12$ を持つ EMTL が全て存在することになる。

一般に $r(x) = n + 1 - x, e(x) = x$ 以外のアフィン変換 $f(x) = ax + b$ では値域 $C = \{1, 2, \dots, n\}$ が変ってしまう。値域を変えないアフィン変換の実現法として剰余環 \mathbf{Z}_n におけるアフィン変換を用いる方法がある¹²⁾。

3.2 EMTL の合成

グラフ G の二つの $[m_v^{(1)}, m_e^{(1)}], [m_v^{(2)}, m_e^{(2)}]$ EMTL $\lambda^{(1)} = \lambda_{[m_v^{(1)}, m_e^{(1)}]}, \lambda^{(2)} = \lambda_{[m_v^{(2)}, m_e^{(2)}]}$ ($n^{(1)} = m_v^{(1)}v + m_e^{(1)}e$ 及び $n^{(2)} = m_v^{(2)}v + m_e^{(2)}e$ で定和 $S^{(1)}, S^{(2)}$) を用いて, 一方の $\lambda^{(2)}$ をアフィン変換 $f_{n^{(1)}}(x) = x + n^{(1)}$ で $f_{n^{(1)}} \circ \lambda^{(2)}$ と変換しもう一方の $\lambda^{(1)}$ で配置する数字と重複しないようにすることで新たな λ を式 (21) で構成する。

$$\lambda(z) = \lambda^{(1)}(z) \cup (f_{n^{(1)}} \circ \lambda^{(2)})(z) \quad (z \in V \cup E) \quad (21)$$

これを合成 (和) と呼び, $\lambda = \lambda^{(1)} \oplus \lambda^{(2)}$ と表すことにする。

命題 7 EMTL の合成の定和

グラフ G の二つの EMTL

$$\begin{cases} \lambda^{(1)} = \lambda_{[m_v^{(1)}, m_e^{(1)}]} & (n^{(1)}: \text{数字の個数}, S^{(1)}: \text{定和}) \\ \lambda^{(2)} = \lambda_{[m_v^{(2)}, m_e^{(2)}]} & (n^{(2)}: \text{数字の個数}, S^{(2)}: \text{定和}) \end{cases}$$

の合成 (和) で得られる $\lambda = \lambda^{(1)} \oplus \lambda^{(2)}$ は EMTL であり, その定和は式 (22) で与えられる。

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + n^{(1)} \cdot (2m_v^{(2)} + m_e^{(2)}) \quad (22)$$

ここで λ の使用する数字, 頂点に配置する数字, 辺に配置する数字の個数 n, m_v, m_e は $n = n^{(1)} + n^{(2)}, m_v = m_v^{(1)} + m_v^{(2)}, m_e = m_e^{(1)} + m_e^{(2)}$ である。

証明は省略する。構成法から明らかなように演算 \oplus は非可換, 即ち $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \neq \lambda_2 \oplus \lambda_1$ である。自明な $[2, 0], [0, 2]$ EMTL に

ついて述べる。

命題 8 自明な $[2, 0], [0, 2]$ EMTL の存在
 任意のグラフ G (v : 頂点の数, e : 辺の数) に対して以下
 の自明な EMTL が存在する。

$$\begin{cases} \lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}} & (n = 2v, \text{定和 } S = 2(2v + 1)) \\ \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}} & (n = 2e, \text{定和 } S = 2e + 1) \end{cases}$$

証明は省略する。自明な EMTL の合成を用いて自明な $[2, 2]$ EMTL を構成できる。

命題 9 自明な $[2, 2]$ EMTL の存在

任意のグラフ G (v : 頂点の数, e : 辺の数) に対して以下の
 自明な $[2, 2]$ EMTL ($n = 2(v + e)$) が存在する。一方の λ_1
 は Super EMTL で最小定和 $S_{\min} = 8v + 2e + 3$ を、もう一
 方の λ_2 は Upper EMTL で最大定和 $S_{\max} = 4v + 10e + 3$
 を与える。

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}} \oplus \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}} & (S_{\min} = 8v + 2e + 3) \\ \lambda_2 = \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}} \oplus \lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}} & (S_{\max} = 4v + 10e + 3) \end{cases}$$

定和に関して以下の不等式が成り立ち、等号は全ての頂点
 の次数が $d_i = 1$ に限る。

$$S_{\max} - S_{\min} = 4(2e - v) \geq 0$$

証明は省略する。命題 9 は容易に拡張できる。

命題 10 自明な $[2k, 2\ell]$ EMTL とその個数

自明な EMTL $\lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}}, \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}}$ の組み合わせで構成できる
 $[2k, 2\ell]$ EMTL の個数 $\varphi(k, \ell)$ は $\varphi(k, \ell) = \frac{(k + \ell)!}{k! \ell!}$ で与え
 られる。

証明は省略する。命題 8 の自明な EMTL との合成 \oplus で得られ
 る EMTL とその定和について述べる。

命題 11 自明な EMTL との合成で得られる EMTL

(1) グラフ G (v : 頂点の個数, e : 辺の個数) の定
 和 S の EMTL $\lambda = \lambda_{[m_v, m_e]}$ と自明な EMTL
 $\lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}}, \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}}$ との合成 \oplus で得られる 4 つの $[m_v +$
 $2, m_e], [m_v, m_e + 2]$ EMTL の定和は以下で与えら
 れる。ここで $m = 2m_v + m_e$ とする。

$$\begin{cases} \lambda \oplus \lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}} & (S' = S + 2(2v + 1) + 4n) \\ \lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}} \oplus \lambda & (S' = S + 2(2v + 1) + 2vm) \\ \lambda \oplus \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}} & (S' = S + (2e + 1) + 2n) \\ \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}} \oplus \lambda & (S' = S + (2e + 1) + 2em) \end{cases}$$

(2) λ が Super EMTL であれば $\lambda \oplus \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}}, \lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}} \oplus \lambda$
 は Super EMTL となる。

(3) λ が Upper EMTL であれば $\lambda \oplus \lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}}, \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}} \oplus \lambda$
 は Upper EMTL となる。

証明は省略する。

定義 2 EMTL の定和分布の分類

- (1) グラフ G が $[m_v, m_e]$ Super EMTL $\lambda_{[m_v, m_e]}$ であ
 り、さらに最大・最小定和 S_{\max}, S_{\min} の間の任意の
 定和 $S \in [S_{\min}, S_{\max}]$ を与える $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(S)}$ が存在
 する時、 $[m_v, m_e]$ Perfect EMTL と定義する。
- (2) グラフ G が $[m_v, m_e]$ Super EMTL でないが
 $S_{\min}^* = \lceil S_{\min} \rceil, S_{\max}^* = \lfloor S_{\max} \rfloor$ で与えられ
 S_{\max}^*, S_{\min}^* の間の任意の定和 $S \in [S_{\min}^*, S_{\max}^*]$ を与
 える $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(S)}$ が存在する時、 $[m_v, m_e]$ SemiPer
 fect EMTL と定義する。
- (3) それ以外を Singular と定義する。

命題 8 で与えた自明な EMTL $\lambda_{[2,0]}^{\text{trivial}}, \lambda_{[0,2]}^{\text{trivial}}$ との合成 \oplus を用
 いて Perfect EMTL の伝搬定理を示す。

定理 4 Perfect, SemiPerfect EMTL の伝搬

グラフ G が $[m_v, m_e]$ Perfect EMTL とする。

- (1) $m_v \geq 2$ の時、任意の $k \geq 1$ に対して $[m_v + 2k, m_e]$
 Perfect EMTL である。
- (2) $m_e \geq 2$ の時、任意の $\ell \geq 1$ に対して $[m_v, m_e + 2\ell]$
 Perfect EMTL である。

グラフ G が $[m_v, m_e]$ SemiPerfect EMTL とする。

- (1) $m_v \geq 3$ の時、任意の $k \geq 1$ に対して $[m_v + 2k, m_e]$
 SemiPerfect EMTL である。
- (2) $m_e \geq 3$ の時、任意の $\ell \geq 1$ に対して $[m_v, m_e + 2\ell]$
 SemiPerfect EMTL である。

証明は省略する。定理 4 から出現するとしても Singular は小さ
 い値の $[m_v, m_e]$ で起こることが示唆される。

3.3 正多面体に対する EMTL について

正多面体の頂点・辺の数などを表 1 に示す。図 3 に正 4 面体
 $(m_v = 1, m_e = 2)$ EMTL の構成例を示す。定理 1 を用いて正多
 面体に対する EMTL の非存在及び Super EMTL/Upper EMTL
 EMTL の非存在を示す命題 12 が得られている⁷⁾。さらに平面グ
 ラフ表示の正多面体 $(m_v = 1, m_e = 2)$ の構成例と漸化的構成
 法⁴⁾ を用いて命題 13 が得られる。

正多面体	頂点 (v)	辺 (e)	面 (f)	次数 (d)
4	4	6	4	3
6	8	12	6	3
8	6	12	8	4
12	20	30	12	3
20	12	30	20	5

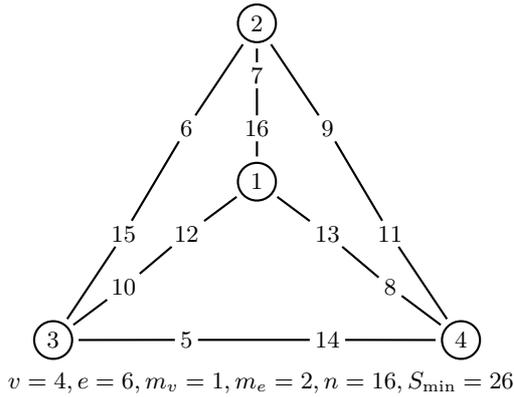


図 3 正 4 面体の [1, 2] 最小 EMTL の構成例

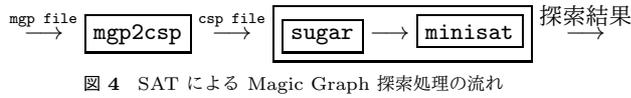


図 4 SAT による Magic Graph 探索処理の流れ

命題 12 正多面体 $[m_v, m_e]$ EMTL の非存在

- (1) 正 4, 1 2, 2 0 面体において m_e が奇数の時, $[m_v, m_e]$ EMTL は存在しない.
- (2) 正多面体において m_e が奇数の時, Super/Upper EMTL は存在しない⁴⁾.

証明は省略する.

注: 正 6 面体の場合は $v \equiv 0, e \equiv 0 \pmod{4}$ であるので m_v, m_e に依らず $n \equiv 0 \pmod{4}$ となり, 定理 1 を適用できないので判定できない.

命題 13 正多面体 $[m_v, m_e]$ EMTL の存在

正多面体において任意の非負の整数 $m_v \geq 0$ に対して $m_e \geq 2$ が偶数の時, EMTL $\lambda_{[m_v, m_e]}$ は存在する. 特に Super/Upper EMTL が必ず存在する.

証明は省略する.

4. SAT ソルバーによる Magic Graph の構成

本論文では SAT ソルバーの minisat と符号化器の sugar¹³⁾⁻¹⁵⁾ を用いて Magic Graph を構成する¹⁶⁾. 処理の流れを図 4 に示す.

4.1 csp の生成と探索

以下の PH-4.m.v:1.m.e:2.mgp は正 4 面体 ($m_v = 1, m_e = 2$) を表す mgp (Magic Graph Profile) ファイルである. 第 1 行目は v, e, m_v, m_e, d を, 2 行目以降は辺数 e の辺 e_e の両端の頂点 v_i, v_j の番号 i, j を表している.

```
PH_4.m.v:1.m.e:2.mgp
4 6 1 2 3 # v=4, e=6, m_v=1, m_e=2, d=3
0 1      # 辺 0: 頂点 0, 頂点 1
0 2      # 辺 1: 頂点 0, 頂点 2
0 3      # 辺 2: 頂点 0, 頂点 3
1 2      # 辺 3: 頂点 1, 頂点 2
2 3      # 辺 4: 頂点 2, 頂点 3
3 1      # 辺 5: 頂点 3, 頂点 1
```

magic graph 探索条件を表す mgp ファイルから csp ファイルを生成する mgp2csp を作成した. 以下は PH_4.m.v:1.m.e:2.mgp から生成された csp ファイル PH_4.m.v:1.m.e:2.csp.S:26 (定和 $S = 26$) である. $n = 16$ であるので 16 個の変数 (v_i, e_{i-j}) が 1 ~ 16 の値を変化すること, 全ての変数が異なる値を持つこと (alldifferent), $e = 6$ 個の辺の定和が $S = 26$ であること ($= (+ v_0 e_{0_0} e_{0_1} v_1) 26$) が記述されている.

```
PH_4.m.v:1.m.e:2.csp.S:26
; mgp2csp PH_4.m.v:1.m.e:2.mgp (S:26)
(int v_0 1 16) ; 値の範囲指定
(int v_1 1 16)
(int v_2 1 16)
(int v_3 1 16)
(int e_0_0 1 16) (int e_3_0 1 16)
(int e_0_1 1 16) (int e_3_1 1 16)
(int e_1_0 1 16) (int e_4_0 1 16)
(int e_1_1 1 16) (int e_4_1 1 16)
(int e_2_0 1 16) (int e_5_0 1 16)
(int e_2_1 1 16) (int e_5_1 1 16)
(alldifferent v_0 v_1 v_2 v_3 e_0_0 e_0_1
 e_1_0 e_1_1 e_2_0 e_2_1 e_3_0 e_3_1
 e_4_0 e_4_1 e_5_0 e_5_1) ; 値が異なること
(= (+ v_0 e_0_0 e_0_1 v_1) 26) ; 辺の数字の和 = 26
(= (+ v_0 e_1_0 e_1_1 v_2) 26)
(= (+ v_0 e_2_0 e_2_1 v_3) 26)
(= (+ v_1 e_3_0 e_3_1 v_2) 26)
(= (+ v_2 e_4_0 e_4_1 v_3) 26)
(= (+ v_3 e_5_0 e_5_1 v_1) 26)
; END
```

SAT ソルバー及び sugar を用いて Magic Graph 生成を行った. 実験に用いたマシンのスペックを表 2 に示す.

型番:	HP ProDesk 600 G2 SF/CT
CPU:	Core i5-6500(3.20GHz) 4core/4thread [第 6 世代]
Memory:	8GB PC4-17000(2,133MHz)
Storage:	128GB Opal2 SSD(Serial ATA/600, MLC)
Ethernet	1000BASE-T
OS	Oracle Solaris 11.3

正 4, 6, 8 面体の全ての定和に対して探索成功であった. 探索時間を表 3 に示す. 正 4 面体では探索時間は全ての定和に対して大きな差はなかったが, 正 6, 8 面体では探索時間は定和の値によって大きく異なり最小定和・最大定和に近いほど探索に要する時間が大きくなった¹⁶⁾.

	平均探索時間 (s)	σ	最小・最大定和 (個数)
正 4 面体	0.40	0.12	26:42 (17)
正 6 面体	181.19	858.41	50:82 (33)
正 8 面体	41.03	80.28	44:80 (37)

4.2 探索の高速化の検討

4.1 で述べた csp ファイルによる SAT ソルバーを用いた正 1 2 面体, 正 2 0 面体に対する探索に時間がかかり, また多くの場合, 動作中に error が発生して指定の定和に対する EMTL が探索できたのは少数に限られていた. 以下では探索の制約条件を追加することで SAT ソルバーでの探索の高速化について述べる.

方法 (1): 複数次数の配置の順序制約

頂点, 辺に複数次数を配置する場合の数字の順序を制約. $m_v, m_e \geq 2$ に対して以下のように順序制約を加える.

$$\begin{cases} v_i^{(0)} < v_i^{(1)} < \dots < v_i^{(m_v-1)} & (i = 1, 2, \dots, v) \\ e_\ell^{(0)} < e_\ell^{(1)} < \dots < e_\ell^{(m_e-1)} & (\ell = 1, 2, \dots, e) \end{cases}$$

csplib ファイルにおいて以下のような頂点や辺に配置する数字に順序を指定する.

```
方法 (1): csp の記述例 (正 4 面体)
( < e_0_0 e_0_1 )
...
( < e_5_0 e_5_1 )
```

方法 (2): 頂点に配置する数字の制約

定和方程式 (6) から S_V の制約式を csp に記述する.

$$(d-1)S_V = e \cdot S - \frac{n(n+1)}{2}$$

csplib ファイルにおいて以下のような頂点の和 S_V の値を指定する.

```
方法 (2): csp の記述例 (正 4 面体)
( = ( * ( + v_0 v_1 v_2 v_3 ) 2 ) 20 )
```

正 8 面体において探索時間の評価を行った. それぞれの方法を用いた時の探索時間を図 5 に示す. 方法 (1) では定和の値により探索時間のばらつきが大きいのにに対して方法 (2) では全ての定和に対してほぼ同一の探索時間となるのがわかる. 表 4 に正 8 面体の全ての定和に対する平均探索時間を示す. 平均探索時間と高速化の効果で比較すると方法 (1) で処理速度は 6 倍程度, 方法 (2) で 64 倍程度, 方法 (1) と (2) を組み合わせても同程度となるのが分かった.

正 1 2, 2 0 面体に対する方法 (1) + 方法 (2) 及び方法 (2) の比較を表 5 に示す. 正 8 面体において効果が不明瞭であったが, 正 1 2, 2 0 面体においては二つの方法を組み合わせる事が効果があることが分かる. 二つの方法を比べると圧倒的に方法 (2) が効果的である. 方法 (1) の制約は 4.1 節で述べた csp とは独立であるのに対して方法 (2) の定和方程式から得られる制約は定和の条件式 (4) から導かれるものであるため 4.1 節の csp に内包されているものである. 一般にソルバーを動作させる上で制約式を多く与えることが効果的であると言われている. 内包されていても明示することで高速化されることが分かった. これら二つの方法を用いることで SAT ソルバーによる探索処理時間が大幅に改良され, 正多面体の様々な条件での Magic graph

(EMTL) の探索が可能となった. 以降の実験では 2 つの方法を用いることとする.

表 6 に正多面体の EMTL の全ての定和に対する平均探索時間を示す. 正 2 0 面体では $m_v = 1, m_e = 2$ の時, 命題 14 で示すように定和は偶数に限られるので, 全ての定和に対する平均探索時間と偶数のみ, 奇数のみの平均探索時間を示す. この結果から全ての正多面体に対して高速に探索できることが分かった. さらに SAT ソルバーによる探索では探索成功の場合には 3.00 秒と非常に高速であるが, 解が存在しない場合の探索には非常に時間がかかることがわかる.

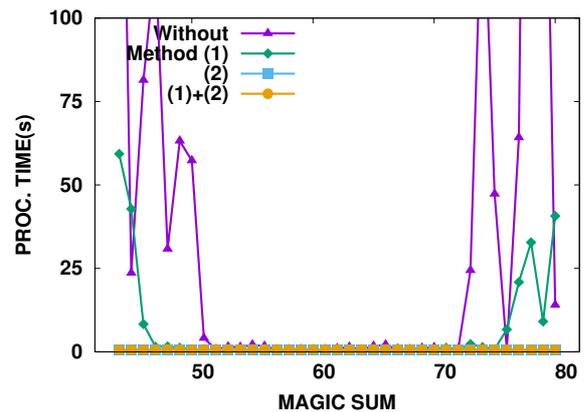


図 5 SAT ソルバーでの正 8 面体 EMTL の探索時間の比較

表 4 正 8 面体における高速化の方法の比較

方法	探索時間 (s)	σ	高速化の効果
高速化なし	41.03	80.28	1
方法 (1)	6.64	13.86	6.18
方法 (2)	0.64	0.05	64.11
方法 (1) + (2)	0.66	0.05	62.17

表 5 正 1 2, 2 0 面体の EMTL 探索時間の比較 ($m_v = 1, m_e = 2$)

	方法 (1) + (2)		方法 (2)	
	平均探索時間 (s)	σ	平均探索時間 (s)	標準
正 1 2 面体	3.90	1.00	4.99	2.09
正 2 0 面体	3.00	1.58	4.49	3.74

表 6 正多面体の EMTL 探索時間 ($m_v = 1, m_e = 2$)

	平均探索時間 (s)	σ	定和の区間
			最小:最大 (個数)
正 4 面体	0.33	0.05	26:42 (17)
正 6 面体	0.76	0.07	50:82 (33)
正 8 面体	0.66	0.05	44:80 (37)
正 1 2 面体	3.90	1.00	122:202 (81)
正 2 0 面体	1942.86	2628.51	98:194 (97)
偶数のみ	3.00	1.58	98:194 (49)
奇数のみ	3923.13	2489.82	99:193 (48)

4.3 正多面体の EMTL

小さい値の $m_v, m_e (\leq 3)$ の探索に帰着されるので以下ではそれらの探索を行う.

4.3.1 正 4 面体と正 1 2 面体

正 4 面体の $[m_v, m_e] = [1, 2](n = 16), [2, 2](n = 20), [3, 2](n = 24)$ の時, S_{\min}, S_{\max} の間の全ての定和に対して SAT による探索で解が全て存在し, Perfect EMTL であった. 同様に正 1 2 面体の $[1, 2](n = 80), [2, 2](n = 100), [3, 2](n = 120)$ の時, SAT による探索で解が全て存在し, Perfect EMTL であった. 以上の結果と命題 12 および定理 4 を用いて正 4, 1 2 面体において Perfect EMTL となる $[m_v, m_e]$ を図 6, 図 7 に示す.

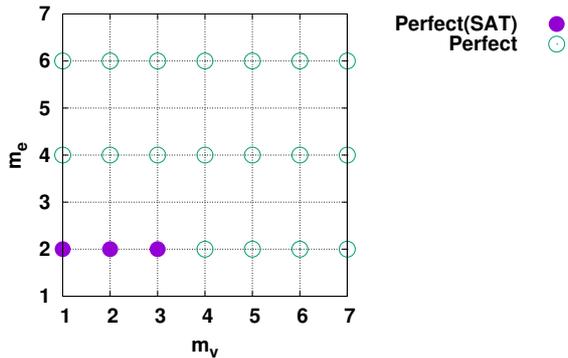


図 6 正 4 面体 EMTL の種類と存在範囲

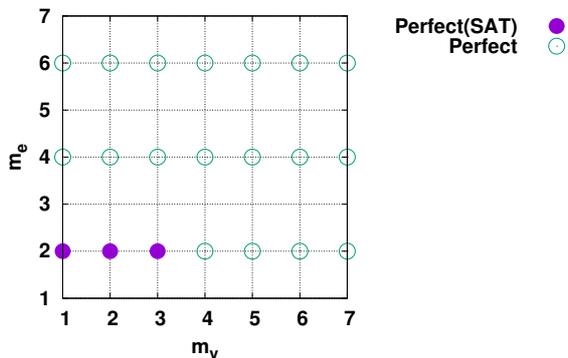


図 7 正 1 2 面体 EMTL の種類と存在範囲

4.3.2 正 2 0 面体

正 2 0 面体 EMTL の定和 S に関して定理 2 の (1) を適用すると $e = 30, d = 5$ であるので $c = (e, d - 1) = (30, 4) = 2$ で $d' = 2$ となるので $S \equiv S_0 \pmod{2}$ となり, 具体的には命題 14 が成り立つ. m_v, m_e の組み合わせにより存在する範囲 S_{\min}, S_{\max} の偶数または奇数のみに限定される.

命題 14 正 2 0 面体 EMTL の定和

正 2 0 面体では命題 12 から EMTL が存在するのは m_e が偶数に限られるので $m_e = 2m'_e$ とする. この時 EMTL の定和は以下を満たす.

$$S \equiv m_v + m'_e \pmod{2}$$

証明は省略する.

$[1, 2](n = 72)$ の全ての偶数の定和, $[1, 4](n = 132)$ の全ての奇数の定和, $[2, m_e = 2](n = 84)$ の全ての奇数の定和, $[3, m_e = 2](n = 96)$ の全ての偶数の定和が SAT による探索で存在した. 偶数・奇数に限定して Perfect EMTL であることが分かった. これを mod Perfect と呼ぶことにする. 以上の結果と命題 12 および定理 4 を拡張適用することで正 2 0 面体において mod Perfect EMTL となる $[m_v, m_e]$ を図 8 に示す.

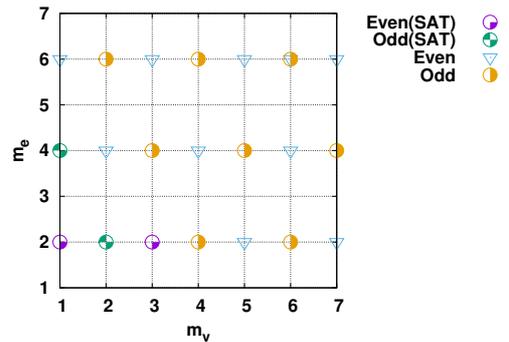


図 8 正 2 0 面体 EMTL の種類と存在範囲

4.3.3 正 6 面体

$[1, 1](n = 20)$ の場合の EMTL の存在する定和を以下に示す. 式 (15) から定和は 24 : 39 の範囲で存在する可能性があるが SAT による探索で解が存在したのは以下の 26, 28, ..., 37 の 8 個のみであり, Singular である.

24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39

$[1, 2](n = 32), [2, 2](n = 40), [3, 2](n = 48)$ の場合, SAT による探索で解が全て存在し, Perfect EMTL である. $[1, 3](n = 44), [2, 1](n = 28), [2, 3](n = 52), [3, 1](n = 36), [3, 3](n = 60), [4, 1](n = 44) [4, 3](n = 68)$ の場合, SAT による探索で解が全て存在し, SemiPerfect EMTL である. 以上の結果と定理 4 を用いて正 6 面体において Perfect, SemiPerfect, Singular となる $[m_v, m_e]$ を図 9 に示す.

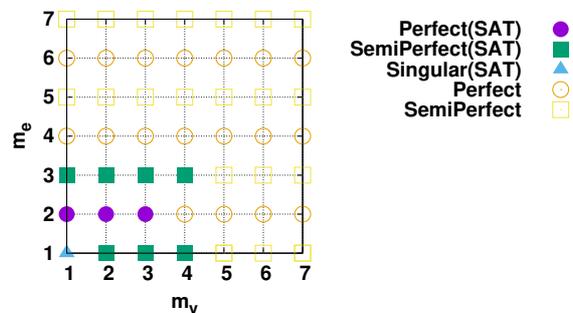


図 9 正 6 面体 EMTL の種類と存在範囲

4.3.4 正 8 面体

$[1, 1](n = 18)$ の場合の定和は $20 : 37$ の範囲で存在する可能性があり SAT による探索で解が 18 個全て存在しなかった。 $[1, 2](n = 30)$, $[2, 2](n = 36)$, $[3, 2](n = 42)$ の場合, SAT による探索で解が全て存在し, Perfect EMTL である。 $[1, 3](n = 42)$, $[2, 1](n = 24)$, $[2, 3](n = 48)$, $[3, 3](n = 54)$, $[4, 1](n = 36)$, $[4, 3](n = 60)$ の場合, SAT による探索で解が全て存在し, SemiPerfect EMTL である。

$[3, 1](n = 30)$, 82, 135 が, $[5, 1](n = 42)$ 192, 281 が singular となっている。以上の結果と定理 4 を用いて正 8 面体において Perfect, SemiPerfect, Singular となる $[m_v, m_e]$ を図 9 に示す。

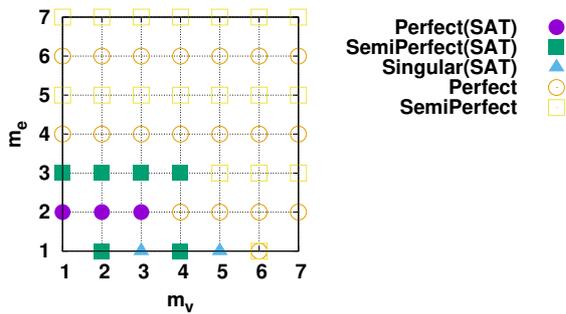


図 10 正 8 面体 EMTL の種類と存在範囲

命題 15 正多面体での $[m_v, m_e]$ EMTL の存在

- (1) 正 4, 1 2, 2 0 面体では $m_v \geq 1$ に対して m_e が偶数の時, 存在し, 奇数の時には存在しない。
- (2) 正 6 面体では全ての $m_v \geq 1, m_e \geq 1$ に対して存在する。
- (3) 正 8 面体では $m_v = 1, m_e = 1$ 以外の全ての $m_v \geq 1, m_e \geq 1$ に対して存在する。

証明は省略する。

命題 16 正多面体 EMTL の定和

- (1) 正 4 面体及び正 1 2 面体は Perfect EMTL である。
- (2) 正 2 0 面体は mod Perfect である。

証明は省略する。

5. む す び

SAT ソルバーを用いた Magic Graph (EMTL) の構成の高速化の方法について述べ, 正多面体における EMTL の存在する条件を明らかにした。SAT ソルバーを用いた探索の結果, EMTL が存在することを実証し, Perfect 伝搬定理を用いてより大きな値の m_v, m_e に対して Perfect EMTL を示すことはできた。

今後の課題は以下の通りである。

- (1) 正 8 面体の $m_v = 1, m_e = 1$ 等の EMTL が非存在の証明
- (2) 一般化 Petersen グラフや多次元立方体などの大規模なグラフに対する SAT ソルバーの適用
- (3) Singular 発生メカニズム解明
- (4) Perfect, Semi/Module Perfect 伝搬定理の改良
- (5) Regular Graph から非 Regular graph への拡張

謝 辞

ソルバーに関してご教示いただき, 議論していただいた神保秀司先生 (岡山大学大学院 自然科学研究科), 保木邦仁先生 (電通大大学院 情報理工学研究科) に感謝します。卒業論文プロジェクトで整数計画ソルバーを用いた Magic Graph の構成の研究を行った中村公紀君, Antimagic graph の構成法の研究を行った堀真哲君 (会津大) に感謝します。

参 考 文 献

- 1) J. Sedláček, Problem 27, in Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, pp.163-164 (June 1963).
- 2) J. MacDougall, M. Miller, Slamin, W. D. Wallis, Vertex-Magic Total Labelings of Graphs, Utilitas Math., 61, pp.3-21 (2002).
- 3) W. D. Wallis, E. T. Baskoro, M. Miller, Edge-magic total labelings, Australasian Journal of Combinatorics, 22, pp.177-190 (Jan. 2000).
- 4) 杉山, グラフへの整数配置問題, 情報処理学会, 3C-2 (2014-03).
- 5) A. M. Marr, W. D. Wallis, Magic Graphs. Second edition, Birkhuser/Springer, New York. (2013)
- 6) J. A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, Electronic J. of Combinatorics (2016).
- 7) 杉山, 正多面体における Magic Graph の構成, 情報処理学会, 7B-02 (2016-03).
- 8) 杉山, Magic graph の一般化とその性質, IPSJ 論文誌, Vol. 59, No.6 掲載予定.
- 9) G. Ringel, A.S. Llado, Another Tree Conjecture, Bull. Inst. Combin. Appl., 17, pp.83-85 (1996).
- 10) J.A.Bondy, U.S.R.Murty, (立花, 奈良, 田澤, 訳), グラフ理論への入門, 共立出版.
- 11) H. Enomoto, A. S. Llado, T. Nakamigawa, G. Ringel, Super Edge-Magic Graphs, SUT Journal Math., Vol.34, No.2, pp.105-109 (1998).
- 12) 杉山, Magic Graph の代数的考察, 情報処理学会, 6A-02 (2015-03).
- 13) 丹生, 命題論理の充足可能性判定問題への符号化を用いた制約充足問題の解法に関する研究, 神戸大学大学院工学研究科博士論文 (2012-01).
- 14) 田村, 丹生, 番原, SAT 変換に基づく制約ソルバーとその性能評価, コンピュータソフトウェア, Vol.27, No.4, pp.183-196 (2008-10).
- 15) 番原, 鍋島, 森畑, SAT 技術の進化と応用, 情報処理, Vol.57, No.8, pp.702-737 (2016-08).
- 16) 杉山, SAT ソルバーを用いた Magic Graph の構成とその応用, 情報処理学会, 3C-03 (2017-03).