

空間図形に対する Magic Graph とその性質

杉 山 雅 英^{†1}

Magic Graphs for Three-Dimensional Space Graphs

MASAHIDE SUGIYAMA^{†1}

和文概要: Sedláček (1963) が Magic Graph 問題を提起して以来、辺・頂点・面に着目する Edge Magic, Vertex Magic, Face Magic が検討されてきた。面に着目する場合、平面グラフに限定されていた。平面グラフでは辺は必ず二つの面によって共有される。しかしながら k 次元空間における超立方体のグラフなどは辺はより多くの面で共有される。本報告では空間図形、特に非平面グラフを含むグラフに対する Magic Graph を検討し、簡単な具体例として ℓ 個の k 角形が一つの辺を共有するグラフ (ℓ - C_k) に対する Face Magic を検討する。定和方程式を用いて定和の剰余制約を導き、 ℓ - C_k [1, 1, 1] FM の定和の個数の上限が $6(k-1)+1$ で与えられることを示す。さらに SAT ソルバーを用いた解探索の結果から定和の個数が $6(k-1)+1$ に一致し、定和の分布が $(\ell-1)$ -Perfect であることを示す。

1. ま え が き

Sedláček (1963)¹⁾ が Magic Graph 問題を提起して以来、辺に着目した Wallis 等 (2000)²⁾ の Edge-Magic Total Labeling (EMTL) や Sugiyama (2018)³⁾ の一般化 EMTL, 頂点に着目した MacDougall 等 (2002)⁴⁾ の Vertex-Magic Total Labeling (VMTL) などが検討されてきた。平面グラフにおける面に着目した Face Magic Graph⁵⁾⁻⁷⁾ やその統一的な取り扱い⁸⁾ が提案されている。さらに k 次元空間における超立方体のグラフに対する EMTL, VMTL の Magic Graph について検討されている^{9),10)}。辺や頂点に着目する Magic Graph は高次元においても辺と頂点との共有関係を用いるだけであるので理論的な枠組みは変わらない。しかしながら面に着目する Magic Graph では異なる。本報告では平面グラフに限定しない 3 次元空間におけるグラフに対する Face Magic Graph について検討する。

正多面体やフラーレン (fullerene) などに代表される半正多面

体などの多面体の空間図形は平面に投影することで平面グラフと同型である。平面グラフにおいては全ての辺は常に 2 つの面に共有されており、従来の Face Magic Graph の検討では全て辺は 2 つの面に共有されることを前提としている。しかしながら辺を多くの面が共有する空間図形が存在している。例えば図 1 に示す 4 次元空間における超立方体 Q_4 は 16 個の頂点を持ち、32 個全ての辺は 3 つの面で共有され、面の個数は 24^{*1} で、8 個の正 6 面体 (立方体) から構成されている。 Q_4 は多面体を一般化した多胞体 (polytope) の一つの正多胞体 (正 8 胞体)^{*2} である。これらのグラフにおいては辺は 3 つ以上の面で共有されている。このような一般の空間図形に対する Magic Graph, 特に非平面グラフに対する Face Magic Graph の検討は見あたらない^{11),12)}。本報告では辺を 3 つ以上の面が共有するグラフに対する Face Magic について検討する。

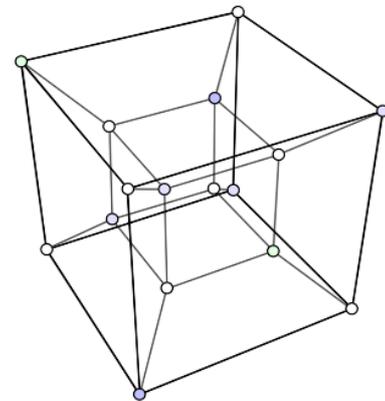


図 1 4次元超立方体の投影グラフ (Q_4) (出典: Wikipedia)

2. 複数の面が辺を共有するグラフ

図 2 に 4 個の三角形が一つの辺を共有するグラフを示す。頂点 v_{01}, v_{02} を結ぶ辺 e_{01} が 4 つの面 f_1, f_2, f_3, f_4 の辺となっている。3 次元空間における連結で頂点・辺・面を持つグラフの集合 φ のグラフ $G = V \cup E \cup F \in \varphi$ から連続する自然数の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割への写像 $\lambda: G \rightarrow 2^{\{1, 2, \dots, n\}}$ に対して式 (1) で重みを定義する。ここで V, E, F はグラフ G の頂点・辺・面 (領域) の集合である。図 2 では $V = \{v_{01}, v_{02}, v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}\}, E = \{e_{01}, e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, e_{31}, e_{32}, e_{41}, e_{42}\}, F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ である。

$$\lambda^*(z) = \lambda(z) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in Z^c}} \lambda(w) \quad (z \in Z) \quad (1)$$

ここで Z は V, E, F のいずれかであり、以降ではそれを $Z = V|E|F$ と表すことにする。式 (1) の右辺の第 2 項の Z^c は $Z = V$ の時、 $Z^c = E \cup F$ であり、式 (1) の右辺の第 2 項の和は頂点 z を共有する全ての辺と面である。 $Z = E$ の時、辺 z の両端の頂点

*1 二つの立方体の面の個数が 12 で新たに 12 個の面が作られる。

*2 正 8 胞体以外に正 5 胞体, 正 16 胞体, 正 24 胞体, 正 120 胞体, 正 600 胞体の 5 つの正多胞体の存在が知られている。

^{†1} 会津大学
The University of Aizu

と z を辺とする全ての面, $Z = F$ の時, 面 z に含まれる辺と頂点である. ただし, 式 (1) の $\lambda(z)$ ($z \in G$) を含む和の計算は部分集合 $\lambda(z)$ に属する数の和と定義する. $\lambda^*(z)$ が全ての $z \in Z$ に対して一定値の時, G, λ を Z Magic (ZM) graph, Z Magic label (写像) と呼び, その一定値 $S = \sigma(\lambda)$ を定和 (magic sum) と呼ぶ. $Z = V, E, F$ に応じて Vertex Magic (VM), Edge Magic (EM), Face Magic (FM) と呼ぶ. 頂点・辺・面に置く数字の個数が各々一定値 $m_v, m_e, m_f (\geq 0)$ の時, $\mathbf{m} = [m_v, m_e, m_f]$ 型 *1 magic graph (label) と呼ぶ⁵⁾. $v = |V|, e = |E|, f = |F|$ とすると n は式 (2) で与えられる.

$$n = m_v v + m_e e + m_f f \quad (2)$$

グラフ G 上の \mathbf{m} 型 Z magic label λ の全体を $\Lambda_{\mathbf{m}}^Z(G)$ で表す³⁾. G の面を含めない場合には $F = \phi, f = 0, m_f = 0$ とし, $\mathbf{m} = [m_v, m_e]$ とする.

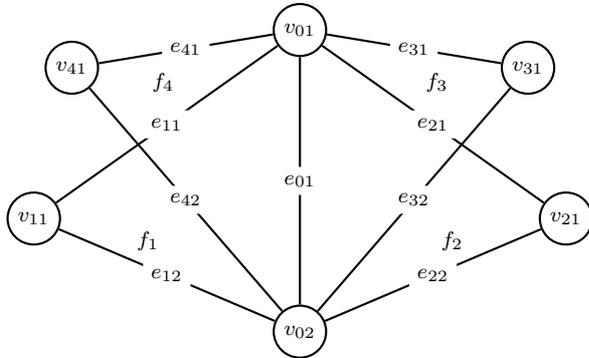


図 2 4 個の三角形が辺を共有するグラフ ($4-C_3$)

2.1 定和方程式と剰余制約

$S_Z = \sum_{z \in Z} \lambda(z)$ ($Z = V|E|F$) と表すと数字 $1, 2, \dots, n$ は V, E, F の要素のいずれかに配置されるので式 (3) が成り立つ.

$$S_V + S_E + S_F = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = N \quad (3)$$

一般の面を持つグラフに対する FM の定和方程式は命題 1 で与えられる.

命題 1 FM の定和方程式

FM の定和 S は式 (4) を満たす. $d_i^{(V)}$ は頂点 v_i の次数であり, $d_j^{(E)}$ は辺 e_j の次数である.

$$f \cdot S = N + \sum_{i=1}^v (d_i^{(V)} - 1)\lambda(v_i) + \sum_{j=1}^e (d_j^{(E)} - 1)\lambda(e_j) \quad (4)$$

証明を省略する. ここで頂点 v_i の次数とは頂点 v_i を共有する面の個数であり, 平面グラフにおいて頂点 v_i を共有する面の個数は v_i を共有する辺の個数に等しいので通常の頂点次数に一致する. 図 2 において v_{01}, v_{11} の通常の頂点の次数は $5, 2$ であるが, 共有する面の個数は $4, 1$ であるので命題 1 の意味での v_{01}, v_{11} の次数は $4, 1$ である. 辺 e_j の次数とは辺 e_j を共有する面の個

*1 Lih は平面グラフに対して頂点・辺・面に置く数字の個数 a, b, c を用いて (a, b, c) 型と呼んでいる.

数であり, 「辺次数の総和 = 面次数の総和」

$$\sum_j d_j^{(E)} = \sum_k d_k^{(F)} \quad (5)$$

が成り立つ. グラフが平面グラフでは辺次数は常に $d_j^{(E)} = 2$ であるので式 (5) の左辺の辺次数の総和は「辺の個数の 2 倍 ($2e$)」となる. さらに式 (4) の右辺の第 3 項は

$$\sum_{j=1}^e (d_j^{(E)} - 1)\lambda(e_j) = S_E$$

と簡単化される. 図 2 の辺 e_{01}, e_{11} の辺の次数は $4, 1$ である. ℓ 個の面が一つの辺を共有するグラフに対して命題 2 が成り立つ.

命題 2 FM の定和の剰余制約

面を持つグラフ G が $\ell (\geq 3)$ 個の面の一つの辺のみを共有している時, Face Magic の定和 S は剰余制約式 (6) を満たす.

$$S \equiv N \pmod{\ell - 1} \quad (6)$$

証明: 図 2 に示したような $f = \ell (\geq 3)$ 個の面が一つの辺を共有するグラフに対して Face Magic に対して ℓ 個の面が共有する頂点及び辺の次数は ℓ であり, それ以外の頂点・辺の次数は 1 であるので定和方程式 (7) が成り立つ.

$$\ell \cdot S = N + (\ell - 1)(\lambda(v_1) + \lambda(e_1) + \lambda(v_2)) \quad (7)$$

ここで v_1, e_1, v_2 は複数の面が共有する辺とその頂点である. グラフ G と配置する数字の個数 n が与えられれば式 (3) の N は定数であるので $\ell - 1$ の剰余を求めることで $\ell \cdot S \equiv S \pmod{\ell - 1}$ を用いて式 (7) の定和 S に関して $S \equiv N \pmod{\ell - 1}$ が成り立つ. (証明終了)

2.2 グラフ $\ell-C_k$ の FM 定和の剰余制約

複数の面が一つの辺を共有するグラフの例として $\ell (\geq 3)$ 個の $k (\geq 2)$ 角形が一つの辺を共有するグラフ ($\ell-C_k$) を検討する. 頂点, 辺, 面の個数及び共有する辺の次数 $v, e, f, d^{(E)}$ は式 (8) で与えられる.

$$\begin{cases} v = \ell(k - 2) + 2, & e = \ell(k - 1) + 1, \\ f = \ell, & d^{(E)} = \ell \end{cases} \quad (8)$$

k, ℓ に係わらず $v - e + f = 1$ であり, オイラーの定理を満たさないので $\ell-C_k$ は平面グラフではない. 即ち, 図 2 に示したグラフは平面グラフではない.

命題 3 $\ell-C_k [m_v, m_e, m_f]$ FM の定和の剰余制約

3 次元空間におけるグラフ G が ℓ 個の k 角形 C_k の面の一つの辺を共有している $\ell-C_k$ の時, $[m_v, m_e, m_f]$ Face Magic の定和 S は剰余制約式 (9) を満たす.

$$S \equiv \frac{\mu_k(\mu_k + 1)}{2} \pmod{\ell - 1} \quad (9)$$

ただし, $\mu_k = (m_v + m_e)k + m_f$ とし, ℓ を偶数とする.

証明: 式 (8) から $v \equiv k, e \equiv k, f \equiv 1 \pmod{\ell - 1}$ であるので式 (2) の $n = m_v v + m_e e + m_f f \equiv (m_v + m_e)k + m_f = \mu_k \pmod{\ell - 1}$ である. 一方, $n(n + 1), \mu_k(\mu_k + 1)$ は共に偶数であり, $\ell - 1$ は奇数であるので $n(n + 1) - \mu_k(\mu_k + 1)$ は $2(\ell - 1)$

の倍数である. $n(n+1) - \mu_k(\mu_k+1) = 2(\ell-1)c$ と書ける.
 従って式 (6) から $S \equiv N = \frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{\mu_k(\mu_k+1)}{2} \pmod{\ell-1}$
 である. (証明終了)

ℓ が奇数の場合については今後の検討課題である.

命題 4 $\ell-C_k [1, 1, 1]$ FM の定和の剰余制約
 3次元空間におけるグラフ G が ℓ 個の k 角形 C_k の面で
 一つの辺を共有している $\ell-C_k$ の時, $[1, 1, 1]$ Face Magic
 の定和 S は剰余制約式 (10) を満たす.

$$S \equiv (2k+1)(k+1) \pmod{\ell-1} \quad (10)$$

証明: 式 (2) の $n = m_v v + m_e e + m_f f = m_v(\ell(k-2)+2) + m_e(\ell(k-1)+1) + m_f \ell$ である. $m_v = m_e = m_f = 1$ の場合は
 $n = \ell(k-2)+2+\ell(k-1)+1+\ell = 2\ell(k-1)+3, n+1 = 2\ell(k-1)+4$ となる. 従って $N = \frac{n(n+1)}{2} = (2\ell(k-1)+3)(\ell(k-1)+2)$
 であるので $\ell-1$ での剰余は以下で与えられる.

$$N \equiv (2k+1)(k+1) \pmod{\ell-1} \quad (11)$$

(証明終了)

$\ell-C_k[1, 1, 1]$ FM の定和の $3 \leq \ell \leq 30, 2 \leq k \leq 30$ に対する
 $\ell-1$ の剰余の値を A.1 節に示す. これから分かるように命題 5
 が成り立つ.

命題 5 $\ell-C_k [1, 1, 1]$ FM の定和の剰余制約の性質

- (1) $\ell-C_k$ において $[1, 1, 1]$ Face Magic の定和を
 $S(k, \ell)$ とすると $k \equiv k' \pmod{\ell-1}$ であれば
 $S(k, \ell) \equiv S(k', \ell) \pmod{\ell-1}$ を満たす.
- (2) 3次元空間におけるグラフ G が ℓ 個の k 角形 C_k
 の面の一つの辺を共有している $\ell-C_k$ ($k = \ell + c$) の
 $[1, 1, 1]$ Face Magic の定和 S は $S \equiv (2c+3)(c+2) \pmod{\ell-1}$ を満たす.

$$\begin{cases} S \equiv 6 \pmod{\ell-1} & (k = \ell) \\ S \equiv 1 \pmod{\ell-1} & (k = \ell - 1) \\ S \equiv 0 \pmod{\ell-1} & (k = \ell - 2) \\ S \equiv 3 \pmod{\ell-1} & (k = \ell - 3) \end{cases} \quad (12)$$

証明: $k = \ell + c$ とすると $S = (2(\ell+c)+1)(\ell+c+1)$ であり
 $\ell \equiv 1 \pmod{\ell-1}$ であるので $S \equiv (2c+3)(c+2) \pmod{\ell-1}$
 となる. (証明終了)

2.3 グラフ $\ell-C_k$ の FM 定和の上限・下限

式 (7) から定和 S の上限・下限は右辺の第 2 項の最大値・最小値
 で与えられ, $[1, 1, 1]$ の時は共有する辺とその頂点に $n, n-1, n-2$
 を配置する時が最大値, $1, 2, 3$ を配置する時が最小値である. 従っ
 て以下で与えられる.

$$\begin{cases} S_{\text{sup}} = \frac{1}{\ell}(N+3(n-1))(d^{(E)}-1) \\ S_{\text{inf}} = \frac{1}{\ell}(N+6(d^{(E)}-1)) \end{cases}$$

命題 6 $\ell-C_k [1, 1, 1]$ FM の定和の上限・下限

$$\begin{cases} S_{\text{sup}} = 2\ell(k-1)^2 + (6\ell+1)(k-1) + 6 \\ S_{\text{inf}} = 2\ell(k-1)^2 + 7(k-1) + 6 \end{cases} \quad (13)$$

$$S_{\text{sup}} - S_{\text{inf}} = 6(\ell-1)(k-1) \quad (14)$$

証明:

$$S_{\text{inf}} = \frac{1}{\ell}(6(\ell-1) + 2\ell^2(k-1)^2 + 7\ell(k-1) + 6) \\ = 2\ell(k-1)^2 + 7(k-1) + 6$$

$X_{\text{max}} - X_{\text{min}} = 3(n-3) = 3 \cdot 2\ell(k-1)$ であるので

$$S_{\text{sup}} - S_{\text{inf}} = \frac{\ell-1}{\ell}(X_{\text{max}} - X_{\text{min}}) = 6(\ell-1)(k-1)$$

である. 従って

$$S_{\text{sup}} = 2\ell(k-1)^2 + (6\ell+1)(k-1) + 6$$

(証明終了)

命題 4 及び命題 6 の式 (14) から命題 7 が導かれる.

命題 7 $\ell-C_k [1, 1, 1]$ FM の定和の個数の上限
 $\ell-C_k [1, 1, 1]$ FM の定和の個数の上限は $6(k-1) + 1$ で
 あり, 上限は ℓ に無関係に定まる.

例えば上限は $k=2$ の時, 7, $k=3$ の時, 13, $k=4$ の時, 19
 となる.

2.4 定和分布の分類

2.3 節の式 (13) で求めた定和の実現可能な区間 $[[S_{\text{inf}}, [S_{\text{sup}}]]$
 の全ての値に対して Magic Graph を構成できるとは限らない.
 式 (13) で与えた定和の上限・下限が整数値であり¹³⁾ その区間
 の全ての値に対して Magic Graph を構成できる場合を Perfect,
 両端を含めて $\delta > 0$ の等差数列となる定和が構成できる場合を
 δ Perfect, 上限・下限の両端は構成できないが他は全て構成で
 きる場合を SemiPerfect, 実現可能な区間に不規則に実現できな
 い定和が出現する場合を Singular と定義した¹⁴⁾

3. SAT ソルバーを用いた Magic Graph の探索

minisat による SAT ソルバー¹⁵⁾ とその符号化器である sugar
 を用いて $\ell-C_k[1, 1, 1]$ Face Magic の解探索を行った. 探索結果
 を表 1 に示す. 表中の項目, 例えば $k=3, \ell=3$ の “44:68 2-P”
 は $k=3$ の三角形を $\ell=3$ の 3 個を一つの辺を共有させた時
 の定和の下限・上限が 44, 68 であり, 2.4 節で述べた $\delta=2$ の
 2-Perfect であることを表している. 表 1 から命題 4 の剰余制
 約が成り立つことが確認できる. 図 2 の $4-C_3$ に対する $[1, 1, 1]$
 Face Magic の定和 $S = 52$ の実現例を図 3 に示す. ここで
 $v=6, e=9, f=4, n=19$ であり, 各面毎に定和が 52 になっ
 ている. $S=52$ は最小定和 (定和の下限) であり, 2.3 節で述
 べたように共有する辺と頂点に $1, 2, 3$ が配置されている.

$\ell=3, k=3$ の時, 定和は

$$\{44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68\}$$

の 13 個, 図 2 に示した $\ell=4, k=3$ の時,

$$\{52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88\}$$

の 13 個である。一方、 $\ell = 3, k = 4$ の時、
 $\{81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, \dots, 111, 113, 115, 117\}$
 の 19 個であり、命題 7 で述べた定和の個数の上限に一致し、 δ
 Perfect 性が成り立っている。また表 1 から例えば $k = \ell$ の時、
 $S \equiv 6 \pmod{\ell - 1}$ 、 $k = \ell - 1$ の時、 $S \equiv 1 \pmod{\ell - 1}$ であり、
 命題 5 が成り立つことが分かる。

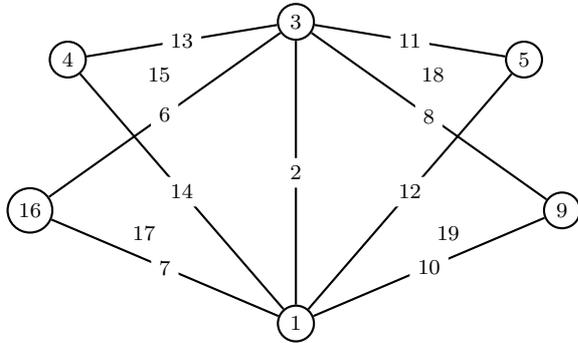


図 3 4 個の三角形が辺を共有するグラフ ($4-C_3$)

$3 \leq k, \ell \leq 10$ に対して計算機探索実験の結果から予想 1 の成り立つことが予想される。証明は今後の課題である。

表 1 $\ell-C_k[1, 1, 1]$ Face Magic 定和の分布

k 角形	共有の面の個数 (ℓ)			
	3	4	5	6
2	19:31 2-P	21:39 3-P	23:47 4-P	25:55 5-P
3	44:68 2-P	52:88 3-P	60:108 4-P	68:128 5-P
4	81:117 2-P	99:153 3-P	117:189 4-P	135:225 5-P
5	130:178 2-P	162:234 3-P	194:290 4-P	226:346 5-P
6	191:251 2-P	241:331 3-P	291:411 4-P	341:491 5-P
7	264:336 2-P	336:444 3-P	408:552 4-P	480:660 5-P
8	349:433 2-P	447:573 3-P	545:713 4-P	643:853 5-P
9	446:542 2-P	574:718 3-P	702:894 4-P	830:1070 5-P
10	555:663 2-P	717:879 3-P	879:1095 4-P	1041:1311 5-P

“A:B δ -P” 下限, 上限, δ -Perfect

予想 1 $\ell-C_k [1, 1, 1]$ FM の定和の分布

- (1) $\ell-C_k [1, 1, 1]$ FM の定和の個数は $6(k - 1) + 1$ 個であり、 ℓ に無関係に定まる。
- (2) $\ell-C_k [1, 1, 1]$ FM は $\delta = \ell - 1$ の δ -Perfect 性を持つ。

4. む す び

本報告では 3 次元空間における連結で頂点・辺・面を持つグラフ、特に ℓ 個の面が 1 つの辺を共有するグラフに対する Face Magic Graph の性質について述べた。定和が $\ell - 1$ の剰余の制約を持つこと、 ℓ 個の面が全て k 角形の場合、定和の個数の上限は ℓ に無関係に $6(k - 1) + 1$ で与えられることを示した。

今後の課題は以下の通りである。

- (1) 一般の m_v, m_e, m_f に対する Face Magic の検討
 - ℓ が奇数の場合の命題 4 の検討
 - $\ell-C_k [m_v, m_e, m_f]$ の δ -Perfect 性について
- (2) 辺を共有する面の一般化
- (3) 予想 1 の証明
- (4) 一般の空間図形の Face Magic の性質

参 考 文 献

- 1) J.Sedláček, Problem 27, in Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, pp.163-164 (June 1963).
- 2) W.D.Wallis, E. T. Baskoro, M. Miller, Edge-magic total labelings, Australasian Journal of Combinatorics, 22, pp.177-190 (Jan. 2000).
- 3) 杉山雅英, Magic Graph の一般化とその性質, IPSJ 論文誌, Vol. 59, No.6, pp.1394-1404 (2018-06).
- 4) J. MacDougall, M. Miller, Slammin, W. D. Wallis, Vertex-Magic Total Labelings of Graphs, Utilitas Math., 61, pp.3-21 (2002).
- 5) Ko-Wei Lih, On Magic and Consecutive Labelings of Plane Graphs, Utilitas Math., 24, pp.165-197 (1983).
- 6) M.Bača, On Magic and Consecutive Labelings for the Special Classes of Plane Graphs, Utilitas Math., 32, pp.59-65 (1987).
- 7) M.Bača, et al, A survey of face-antimagic evaluations of graphs, Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 69 (3), pp.382393 (2017).
- 8) 杉山 雅英, 平面グラフの Magic Graph の性質, 情報処理学会東北支部研究会, No.2018-3-5 (2018-12).
- 9) 田茂井 圭祐, 杉山 雅英, k 次元超立方体における Magic Graph の構成の検討, 情報処理学会東北支部研究会, No.2018-3-4 (2018-12).
- 10) 田茂井 圭祐, 杉山 雅英, SAT ソルバーを用いた k 次元超立方体に対する Magic Graph の構成 — Vertex-Magic Total Labeling について —, 情報処理学会東北支部研究会, No. 006KNJ (2019-02).
- 11) J.A.Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, Electronic J. of Combinatorics (2016).
- 12) A.M.Marr, W.D.Wallis, Magic Graphs. Second edition, Birkhuser/Springer, New York. (2013)
- 13) H. Enomoto, A. S. Llado, T. Nakamigawa, G. Ringel, Super Edge-Magic Graphs, SUT Journal Math., Vol.34, No.2, pp.105-109 (1998).
- 14) 杉山雅英, SAT ソルバーを用いた正多面体に対する Magic Graph の構成, 情報処理学会東北支部研究会, No.2017-2-3 (2018-02).
- 15) 番原, 他, SAT 技術の進化と応用, 情報処理, Vol.57, No.8, pp.702-737 (2016-08).

付 録

A.1 $\ell-C_k[1, 1, 1]$ FM 定和の剰余

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	1	0	3	0	3	1	7	6	5	4	3	2	1	0	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
3	0	1	0	3	4	0	4	1	8	6	4	2	0	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	28
4	1	0	1	0	3	3	5	0	5	1	9	6	3	0	13	11	9	7	5	3	1	22	21	20	19	18	17	16
5	0	0	2	1	0	3	2	3	6	0	6	1	10	6	2	15	12	9	6	3	0	20	18	16	14	12	10	8
6	1	1	3	1	1	0	3	1	1	3	7	0	7	1	11	6	1	15	11	7	3	22	19	16	13	10	7	4
7	0	0	0	0	0	1	0	3	0	10	0	3	8	0	8	1	12	6	0	15	10	5	0	20	16	12	8	4
8	1	0	1	3	3	6	1	0	3	10	9	10	13	3	9	0	9	1	13	6	21	15	9	3	23	18	13	8
9	0	1	2	0	4	1	6	1	0	3	10	8	8	10	14	3	10	0	10	1	14	6	22	15	8	1	22	16
10	1	0	3	1	3	0	7	6	1	0	3	10	7	6	7	10	15	3	11	0	11	1	15	6	23	15	7	28
11	0	0	0	1	0	3	4	6	6	1	0	3	10	6	4	4	6	10	16	3	12	0	12	1	16	6	24	15
12	1	1	1	0	1	3	5	1	5	6	1	0	3	10	5	2	1	2	5	10	17	3	13	0	13	1	17	6
13	0	0	2	3	0	0	2	0	8	4	6	1	0	3	10	4	0	17	18	0	4	10	18	3	14	0	14	1
14	1	0	3	0	3	1	3	3	5	6	3	6	1	0	3	10	3	17	15	15	17	21	3	10	19	3	15	0
15	0	1	0	1	4	6	0	1	6	1	4	2	6	1	0	3	10	2	16	13	12	13	16	21	2	10	20	3
16	1	0	1	1	3	1	1	3	1	0	9	2	1	6	1	0	3	10	1	15	11	9	9	11	15	21	1	10
17	0	0	2	0	0	0	6	0	0	3	6	6	0	0	6	1	0	3	10	0	14	9	6	5	6	9	14	21
18	1	1	3	3	1	3	7	1	3	10	7	1	3	13	15	6	1	0	3	10	21	13	7	3	1	1	3	7
19	0	0	0	0	0	3	4	6	0	10	0	0	10	0	12	15	6	1	0	3	10	21	12	5	0	24	24	26
20	1	0	1	1	3	0	5	6	1	3	9	3	7	6	13	11	15	6	1	0	3	10	21	11	3	24	21	20
21	0	1	2	1	4	1	2	1	6	0	10	10	8	1	2	11	10	15	6	1	0	3	10	21	10	1	22	18
22	1	0	3	0	3	6	3	0	5	1	3	8	13	0	11	15	9	9	15	6	1	0	3	10	21	9	27	20
23	0	0	0	3	0	1	0	3	8	6	0	10	8	3	8	6	12	7	8	15	6	1	0	3	10	21	8	26
24	1	1	1	0	1	0	1	1	5	4	1	3	7	10	9	1	1	9	5	7	15	6	1	0	3	10	21	7
25	0	0	2	1	0	3	6	3	6	6	6	0	10	6	14	0	12	15	6	3	6	15	6	1	0	3	10	21
26	1	0	3	1	3	3	7	0	1	1	3	1	3	6	7	3	9	6	11	3	1	5	15	6	1	0	3	10
27	0	1	0	0	4	0	4	1	0	0	4	6	0	10	4	10	10	1	0	7	0	22	4	15	6	1	0	3
28	1	0	1	3	3	1	5	6	3	3	9	2	1	3	5	4	15	0	13	15	3	20	21	3	15	6	1	0
29	0	0	2	0	0	6	2	6	0	10	6	2	6	0	10	2	6	3	10	6	10	22	18	20	2	15	6	1
30	1	1	3	1	1	1	3	1	1	10	7	6	1	1	3	4	1	10	11	1	21	5	19	16	19	1	15	6
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30